**Основные определения. Операции над комплексными числами**

1. Существует элемент i (мнимая единица) такой, что i2 = – 1.

2. Символ a + bi называют комплексным числом с действительной частью a и мнимой частью bi, где a и b – действительные числа, b – коэффициент мнимой части.

Комплексное число a + 0i отождествляется с действительным числом a, т.е. a + 0i = a, в частности, 0 + 0i = 0. Числа вида bi (b  0) называют чисто мнимыми.

Например, комплексное число 2 + 3i имеет действительную часть – действительное число 2 и мнимую часть 3i, действительное число 3 – коэффициент мнимой части.

Комплексное число 2 – 3i имеет действительную часть число 2, мнимую часть – 3i, число – 3 – коэффициент при мнимой части.

3. Правило равенства. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны коэффициенты мнимых частей.

Т.е., если a + bi = c +di, то a = c, b = d: и, обратно, если a = c, b = d, то a + bi = c +di.

4. Правило сложения и вычитания комплексных чисел.

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.

Например:

(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;

(– 2 + 3i) + (1 – 8i) = (– 2 + 1) + (3 + (– 8))i = – 1 – 5i;

(– 2 + 3i) + (1 – 3i) = (– 2 + 1) + (3 + (– 3))i =

= – 1 + 0i = – 1.

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению, и выполняется по формуле:

(a + bi) – (c + di) = (a – c) + (b – d)i.

Например:

(5 – 8i) – (2 + 3i) = (3 – 2) + (– 8 – 3)i = 1 – 11i;

(3 – 2i) – (1 – 2i) = (3 – 1) + ((– 2) – (– 2))i = 2 + 0i = 2.

5. Правило умножения комплексных чисел.

(a + bi)(c + di) = (aс + bd) + (ad + bc)i.

Из определений 4 и 5 следует, что операции сложения, вычитания и умножения над комплексными числами осуществляются так, как будто мы выполняем операции над многочленами, однако с условием, что i2 = – 1.

Действительно: (a + bi)(c + di) = ac + adi + bdi2 = (ac – bd) + (ad + bc)i.

Например, (– 1 + 3i)(2 + 5i) = – 2 – 5i + 6i + 15i2 = – 2 – 5i + 6i – 15 = – 17 + i; (2 + 3i)(2 – 3i) = 4 – 6i + 6i – 9i2 = 4 + 9 = 13.

Из второго примера следует, что результатом сложения, вычитания, произведения двух комплексных чисел может быть число действительное. В частности, при умножении двух комплексных чисел a + bi и a – bi, называемых сопряженными комплексными числами, в результате получается действительное число, равное сумме квадратов действительной части и коэффициента при мнимой части. Действительно:

(a + bi)(a – bi) = a2 – abi + abi – b2i2 = a2 + b2.

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число.

Например: 5i•3i = 15i2 = – 15; – 2i•3i = – 6i2 = 6, и вообще bi•di = bdi2 = – bd.

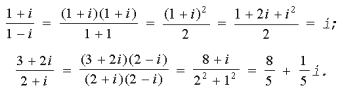
6. Деление комплексного числа a + bi на комплексное число c + di  0 определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

http://mat.1september.ru/2001/10/no10_02.gif.

Формула теряет смысл, если c + di = 0, так как тогда c2 + d2 = 0, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например,



Опираясь на введенные определения нетрудно проверить, что для комплексных чисел справедливы коммутативный, ассоциативный и дистрибудивный законы. Кроме того, применение операций сложения, умножения, вычитания и деления к двум комплексным числам снова приводит к комплексным числам. Тем самым можно утверждать, что множество комплексных чисел образует поле. При этом, так как комплексное число a + bi при b = 0 отождествляется с действительным числом a = a + 0i, то поле комплексных чисел включает поле действительных чисел в качестве подмножества.